Zagadnienie siły centralnej.

Całki ruchu, energia efektywna

Siła centralna to taka, której kierunek jest zawsze radialny: zgodny lub przeciwny do kierunku wektora położenia, zaś jej wartość zależy jedynie od długości tego wektora (odległości od centrum oddziaływania, umieszczonego z racji symetrii w *O* układu współrzędnych): $\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$.

Skoro więc zawsze $\vec{F} \parallel \vec{r}$, moment siły centralnej $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} = d/dt\ \vec{L}$, co daje nam, że moment pędu w ruchu w polu siły centralnej jest zachowany. Skoro pęd wyraża się jako

$$\vec{p} = m\,(\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}) \quad ,$$

to ów stały – i co do wartości, i kierunku – moment pędu (**druga całka ruchu**) jest równy

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\,(\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}) = m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\hat{z} = \overrightarrow{Const} \quad .$$

Powyższe równanie można równoważnie zapisać z użyciem *momentu bezwładności* punktu materialnego, odległego o r od osi obrotu: $L = I\,\omega$ (pochodna φ po czasie to nic innego, jak prędkość kątowa ω).

Natomiast **pierwszą całkę ruchu** stanowi energia całkowita, która przy braku zewnętrznych źródeł i ścieków energii musi pozostać zachowana:

$$E = E_k + V(r) = Const \quad .$$

Zachodzi przy tym $\vec{F} = -\nabla V(r)$. Rozpiszmy energię kinetyczną i rozwiążmy równanie. Kształt potencjału zależy od konkretnego zagadnienia (cf. przykład poniżej).

$$E = \frac{m\,(\vec{v})^2}{2} + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m\,\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{L^2}{2m\,r^2} + V(r)}_{=:E_{eff}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E - E_{eff}} = \frac{dr}{dt}$$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - E_{eff}}} \quad .$$

W ten sposób otrzymaliśmy (odwrotne) równanie ruchu dla zmiennej *r*: $t(r)$, którego rozwiązanie zależy od naszej zdolności do odcałkowania prawej strony, a więc od kształtu energii efektywnej. Przy odrobinie szczęścia, zdołamy je następnie odwrócić do postaci *r = r(t).*

Równanie ruchu w zmiennej φ wynika teraz wprost z wyżej wypisanej wartości L, a mianowicie

$$\frac{L}{mr^2} = \frac{d\varphi}{d\,t} \Leftrightarrow \varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m}\int \frac{dt}{r^2} \quad ,$$

do którego wstawiamy znalezioną z poprzedniego równania zależność *r(t).* Analogiczna postać tego równania (*via* przedostatnia równość na poprzedniej stronie) i po skorzystaniu z faktu, że $\frac{d(1/r)}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}$, jawi się w postaci (odwrotnego) *równania toru*

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{2m}}\int \frac{d\,r}{r^2\sqrt{E - E_{eff}}} \equiv -\frac{L}{\sqrt{2m}}\int \frac{d(1/r)}{\sqrt{E - E_{eff}}} \quad ,$$

wygodnej dla potencjałów zależnych od ujemnych potęg *r.*

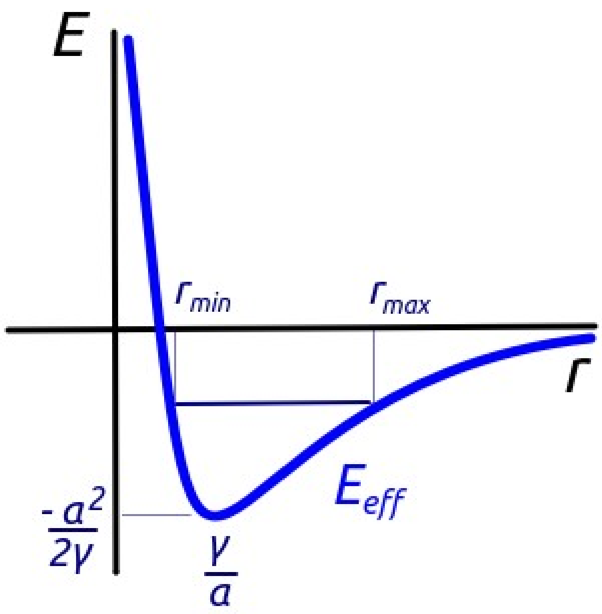
Przykład:

Zbadać ruch punktu materialnego w potencjale grawitacyjnym $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\ ;\ \ \alpha > 0\,, \beta \geq 0$.

Pierwszy człon, to klasyczny człon keplerowski $\alpha = G\ Mm$ (lub coulombowski $\alpha = k\ Qq$). Drugi człon – to człon relatywistyczny, wprowadzający poprawkę z OTW. Przy jego nieobecności, jako rozwiązanie na tor otrzymujemy zwykłą orbitę eliptyczną lub ogólniej, krzywą stożkową (cf. artykuł *Drugie i pierwsze prawo Keplera*). Jednak w obecności efektów relatywistycznych – pomijając efekty pływowe i perturbacyjne od innych ciał – tor obiektu nie domyka się w tak czysty sposób jak w elipsie i np. w obliczu niskiej orbity wokół dużej masy – tak jak to ma miejsce z układem Merkury-Słońce – spodziewamy się braku stałej lokalizacji peryhelium planety, ale jego przesuwania się (wraz z całym konturem orbity). Efekt ten, teoretycznie przewidziany i wyznaczony przez Schwarzschilda – a wynoszący około 43’’ łuku na 100 lat – stał się pierwszym i podstawowym dowodem prawdziwości Ogólnej Teorii Względności Einsteina.

Energia efektywna w naszym przypadku wynosi

$$E_{eff} \;=\; -\frac{\alpha}{r} \;+\; \frac{\beta}{r^2} \;+\; \frac{L^2}{2mr^2} \;=\; -\frac{\alpha}{r} \;+\; \frac{L^2+2m\beta}{2mr^2} \;=:\; -\frac{\alpha}{r} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{r^2}\,, \quad \gamma > 0 \quad .$$



Energia efektywna ma przebieg taki, jak na rysunku. Tradycyjnie, stany związane opisuje się za pomocą ujemnej energii całkowitej. Energia może być jedynie nie mniejsza od (jeszcze bardziej ujemnej) E_{eff} , wówczas wyrażenie pierwiastkowe w równaniu toru jest rzeczywiste. Dla $E \;=\; E_{eff\,,\,min}$ mamy ruch po okręgu (zresztą jednostajny). Dla większych energii, nie przekraczających *0*, mamy ruch ograniczony; dla $E \;\geq\; 0$ staje się on prawostronnie nieograniczony (obiekt ucieka centrowi grawitacji z prędkością kosmiczną).

Warunek na r_{min} , r_{max} znajdujemy jako przecięcie poziomej linii energii całkowitej z krzywą energii efektywnej (rys.), czyli z warunku równości energii całkowitej i efektywnej, tj. z zerowania się składnika radialnego energii kinetycznej – tego nie włączonego w skład E_{eff} – w szukanych punktach *r* (np. dla czystej elipsy, aphelium i peryhelium wypada w dwóch jedynych punktach orbity, w których wektor wodzący i prędkość są pod kątem prostym, a zatem składowa radialna prędkości znika i cała prędkość jest w kierunku transwersalnym).

Minimum energii efektywnej otrzymamy z warunku

$$E'_{eff} \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\gamma}{r^3} \;=\; 0$$
$$\alpha\, r \,-\, \gamma \;=\; 0$$
$$r \;=\; \frac{\gamma}{\alpha} \quad .$$
$$E_{eff}(\gamma/\alpha) \;=\; -\alpha\,\frac{\alpha}{\gamma} \;+\; \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right) \;=\; -\frac{\alpha^2}{2\,\gamma} \quad .$$

Łatwo przekonujemy się, że z lewej strony punktu $E'_{eff} = 0$ pochodna jest ujemna, a po prawej – dodatnia, co faktycznie oznacza minimum E_{eff} .

Wprowadzając oczywistą zmienną *u := 1/r*, mamy

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{\gamma}{2} u^2 + \alpha u + E}} \quad .$$

Wyróżnik funkcji kwadratowej pod pierwiastkiem jest dodatni: $\alpha^2 > 2\gamma|E|$, bo rozważamy tu ruch ograniczony ciała, z dwoma miejscami zerowymi (jak na rys.). Z tablicy całek (np. Bronsztejn: nr 241) znajdujemy rozwiązanie w postaci

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{L}{\sqrt{L^2 + 2m\beta}} \arcsin \frac{-\gamma u + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2\gamma E}} \ ,$$

skąd

$$\frac{-\gamma u + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2\gamma E}} = \sin\left(-\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}(\varphi - \varphi_0)\right) = -\sin\left(\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}(\varphi - \varphi_0)\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} cosinus\ jest\ sinusem \\ przesuniętym\ w\ fazie \\ (kwestia\ konwencji) \end{matrix}\right\} = -\cos\left(\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}\ (\varphi - \varphi_1)\right)$$

$$-\gamma\frac{1}{r} + \alpha = -\sqrt{\alpha^2 + 2\gamma E}\ \cos\left(\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}\ (\varphi - \varphi_1)\right)$$

$$\frac{-\gamma}{\alpha}\frac{1}{r} + 1 = -\sqrt{1 + \frac{2\gamma E}{\alpha^2}}\ \cos\left(\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}\ (\varphi - \varphi_1)\right)$$

$$\frac{\gamma/\alpha}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\gamma E}{\alpha^2}}\ \cos\left(\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}\ (\varphi - \varphi_1)\right)} = r \ .$$

Wprowadzając klasyczne oznaczenia, zaczynamy dostrzegać ogromne podobieństwo wzorów:

$$r = \frac{p}{1 + e\ \cos[\chi(\varphi - \varphi_0)]} \quad .$$

Gdy efekty relatywistyczne są nieobecne, $\beta = 0 \ \Rightarrow \ \chi = 1$, i nasze rozwiązanie jest wzorem na keplerowskie, stacjonarne i domknięte krzywe stożkowe (elipsę dla $0 \le e < 1$, parabolę dla $e = 1$ i hyperbolę dla $e > 1$). Tymczasem, dla $\chi > 1$ okres ulega skróceniu, ale okres w kącie, nie w czasie! Oznacza to, że kolejne r_{min} wypada nam proporcjonalnie wcześniej, niż po wykonaniu pełnych 2π kąta φ – peryhelium uległo przesunięciu w stosunku do jego poprzedniego azymutu!

Nb. Proszę zauważyć, porównując z policzonymi współrzędnymi $\left(\frac{\gamma}{\alpha}; -\frac{\alpha^2}{2\gamma}\right) = \left(r_{E\,min}; E_{eff,min}\right)$ dla minimum energii efektywnej, że formuła nasza równoważna jest

$$r = \frac{r_{E\,min}}{1 + \sqrt{1 - \left|\frac{E}{E_{eff,min}}\right|} \cos[\chi(\varphi - \varphi_0)]} ,$$

przy czym $0 < \left|\frac{E}{E_{eff,min}}\right| \leq 1$, i zawsze $0 < r_{min} \leq r_{E\,min} \leq r_{max}$ (równości zachodzą wyłącznie dla ruchu po okręgu w minimum energii efektywnej).

Dodatek: wyprowadzenie wzoru Bineta

Przy okazji, będzie to interesująca wprawka z przekształcania różniczek.

Wzór Bineta jest ważną tożsamością obowiązującą w zagadnieniu siły centralnej i pomaga uprościć wiele przypadków. Jego postać, to

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = -\frac{m r^2}{L^2} F(r) ,$$

gdzie *F(r)* jest wartością siły w odległości *r* od centrum. Udowodnijmy prawdziwość wzoru Bineta.

Wychodzimy od stwierdzenia, że siła ma tylko składową radialną, a stały moment pędu ma taką postać (jedyną niezerową składową *z*-ową), jaką już wypisaliśmy explicité:

$$F(r) = m(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2) ,$$
$$L = m r^2 \dot{\varphi} = Const .$$

Mamy zatem

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}\,dt = \frac{L}{mr^2}\frac{dt}{dr}\,dr = \frac{L}{mr^2}\frac{1}{\dot{r}}\,dr = -\frac{L}{m}\frac{1}{\dot{r}}\,d\left(\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = -\frac{m}{L}\,\dot{r}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{m}{L}\frac{d}{d\varphi}\,\dot{r} = -\frac{m}{L}\frac{dt}{d\varphi}\frac{d}{dt}\,\dot{r} = -\frac{m}{L}\frac{1}{\dot{\varphi}}\,\ddot{r} .$$

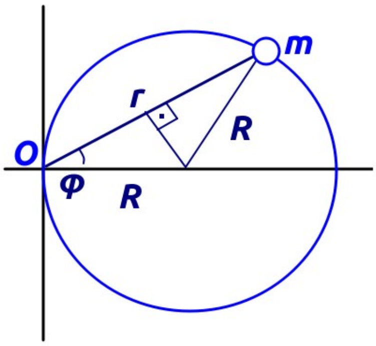
Dzieląc obustronnie przez $\dot{\varphi}$ obie strony równania na *F(r)* i podstawiając z otrzymanej postaci powyżej, dostajemy

$$\frac{1}{\dot{\varphi}} F(r) = -L \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - m\underbrace{r\dot{\varphi}}_{=L/r} = -L\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{mr^2}{L^2} F(r) = \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}. \quad \square$$

Przykładowe zadanie:

Znaleźć postać siły centralnej, która gwarantuje ruch po regularnym okręgu o promieniu *R*, który to okrąg przechodzi bardzo blisko centrum oddziaływania.

Oczywistym jest fakt, że punkt *O* – centrum siły – stanowi osobliwość: ciało zbliżając się do peryhelium np. od góry, będzie doznawało ogromnych (w granicy: nieskończonych) przyspieszeń w dół, tak, aby natychmiast po jego minięciu zostało poddane identycznym, ogromnym przyspieszeniom w przeciwną stronę – w górę, które się wzajemnie zniosą z tymi sprzed chwili. Ruch zatem nawet w otoczeniu punktu *O* możemy uznać za w przybliżeniu rzeczywisty. Tak czy owak, peryhelium stanowi niewątpliwie punkt, zbliżając się do którego promień *r* maleje (niemal) do zera, aby po nim znów zacząć przyrastać – jest więc punktem zwrotnym.



Dzięki elementarnej geometrii odnajdujemy bardzo łatwo równanie toru $r(\varphi)$: $r = 2R\cos\varphi$.

Wówczas $\frac{1}{r} = \frac{1}{2R}\frac{1}{\cos\varphi}$, wystarczy teraz policzyć drugą pochodną po kącie φ i skorzystać z tożsamości Bineta.

Mamy więc

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r} = \frac{1}{2R}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} ,$$
$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{r} = \frac{1}{2R}\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\cos^3\varphi + 2\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\right) = \frac{1}{r}\left(1 + 2\tan^2\varphi\right) \;;$$

natomiast $\tan^2\varphi = \dfrac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{4R^2 - r^2}{r^2}$.

Ze wzoru Bineta mamy teraz

$$-\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left(1 + 2\frac{4R^2 - r^2}{r^2}\right)\right] = F(r)$$
$$\Leftrightarrow\ F(r) = -\frac{8L^2R^2}{m}\frac{1}{r^5} \ .$$

Potencjał, który odpowiada tej sile (wyprowadzenie ponizej), to $V(r) = -\dfrac{2L^2R^2}{m}\dfrac{1}{r^4}$, czyli

$$E_{eff} = -\frac{2L^2R^2}{m}\frac{1}{r^4} + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2m}\frac{r^2 - 4R^2}{r^4} \ .$$

Drugi punkt zwrotny – poza peryhelium w bliskości punktu O – stanowić będzie punkt równoważenia się energii całkowitej i efektywnej.

Kładąc ciało początkowo – dla ustalenia uwagi – w punkcie (2R, 0), nadajemy mu energię potencjalną w polu siły centralnej – dokładnie taką, jaką wykonujemy pracę (przeciwdziałając przyciągającej sile) przy sprowadzeniu go z nieskończoności ku centrum siły aż do odległości 2R. Żądając, żeby jego prędkość liniowa odpowiadała dokładnie przyspieszeniu dośrodkowemu w ruchu po okręgu o promieniu R, musimy nadać mu pewną energię kinetyczną. Otóż mamy:

$$V = \left\{\begin{matrix}\textit{ponieważ}\\ F = -\nabla V\end{matrix}\right\} = -\int_{\infty}^{2R}\left(-\frac{8L^2R^2}{m}\frac{1}{r^5}\right)dr = \frac{8L^2R^2}{m}\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(2R)^4} = -\frac{L^2}{8m}\frac{1}{R^2} \ ,$$
$$-\frac{L^2}{4m^2}\frac{1}{R^3} = F_{centr}(2R)/m = a_{dośr}(R) = -v^2/R \ \Leftrightarrow\ v^2 = \frac{L^2}{4m^2}\frac{1}{R^2} \ \Leftrightarrow\ E_k = \frac{L^2}{8m}\frac{1}{R^2} \ ;$$
$$\text{wówczas},\ E = E_k + V = 0 \ .$$

Licząc miejsce zerowe E_{eff} , nietrudno dojść do wniosku, że wypada ono dla r = 2R. A zatem dla energii całkowitej równej zeru, punkt przecięcia się (zerowej) E i E_{eff} , czyli punkt zwrotny, wypada w miejscu zerowym E_{eff} , czyli w odległości 2R od centrum.

Wobec obu punktów zwrotnych mamy zatem $0 \le r \le 2R$.

Autor: Marek Pietrachowicz.